

TO  **DE CASA**
NO
ENEM
2020



CADERNO DO
ALUNO

“

MATEMÁTICA E
SUAS TECNOLOGIAS

”

SECRETARIA DA
EDUCAÇÃO, JUVENTUDE
E ESPORTES

TOCANTINS
GOVERNO DO ESTADO



MAURO CARLESSE

Governador do Estado

WANDERLEI BARBOSA CASTRO

Vice-Governador do Estado

ADRIANA COSTA PEREIRA AGUIAR

Secretária Estadual da Educação, Juventude e Esportes

ROBSON VILA NOVA LOPES

Secretário Executivo da Educação, Juventude e Esportes

AMANDA PEREIRA COSTA

Superintendente de Educação Básica

LARISSA RIBEIRO DE SANTANA

Diretora de Desenvolvimento da Educação

SCHIERLEY RÉGIA COSTA COLINO DE SOUSA

Gerente de Ensino Médio

EQUIPE TÉCNICA

Gerente do Ensino Médio

Schierley Régia Costa Colino de Sousa

Coordenador do Programa

Wellington Rodrigues Fraga

Assessora Técnica de Língua Portuguesa

Eliziane de Paula Silveira

Assessora Técnica de Língua Inglesa

Alessandra Quirino Chiarioni

Assessora Técnica de Artes

Heloísa Rehder Coelho Sobreira

Assessor Técnico de Matemática

Sóstenes Cavalcante de Mendonça

Assessora Técnica de História

Jonara Lúcia Streit

Assessora Técnica de Geografia

Lilian Moraes Mancini

Assessor Técnico de Filosofia

Eduardo Ribeiro Gonçalves

Assessor Técnico de Sociologia

Claudio Carvalho Bento

Assessor Técnico de Biologia

Wellington Rodrigues Fraga

Assessora Técnica de Química

Luciana de Maria Carvalho Viana

Assessoras da Diretoria de Desenvolvimento da Educação

Dalília Núbia Gonçalves de Lima Arantes

Patrícia da Silva Freitas

[[**TO**  **NO**]]

Matemática

ENEM

2020

ENEM (2017) QUESTÃO 136

Um empréstimo foi feito a taxa mensal de $i\%$, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P . O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela. A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

FICA A DICA! A taxa mensal é dada por $i\%$. A quitação é feita no ato do pagamento da 6ª parcela.

O valor da parcela é dado por:
$$\frac{P+P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} =$$

Colocando P em evidência temos:

$$P \cdot \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} \right]$$

A)
$$P \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} \right]$$

B)
$$P \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)} \right]$$

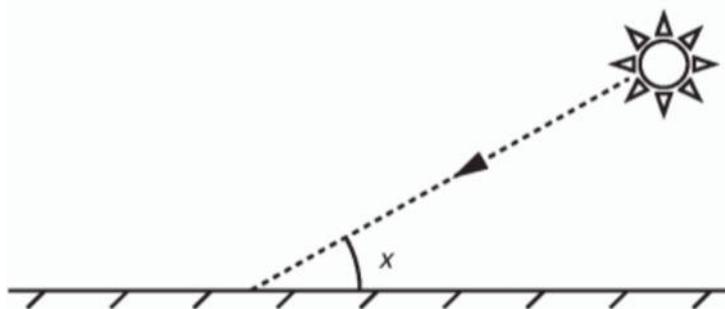
C)
$$P \left[1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} \right]$$

$$D) P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{2i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{3i}{100}\right)} \right]$$

$$E) P \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{100}\right)^3} \right]$$

ENEM (2017) QUESTÃO 138

Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo X com a superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, sendo K uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90° .



Quando $X = 30^\circ$, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

- A) 33%
- B) 50%
- C) 57%
- D) 70%
- E) 86%

ANÁLISE DA QUESTÃO

Sendo dada a fórmula $I(x) = k \cdot \text{sen}(x)$, temos que o limite máximo é 90° , devemos buscar a sua luminosidade quando $X = 30^\circ$.

$$I(x) = K \cdot \text{sen } X \Rightarrow I_{\max} = \lim_{x \rightarrow 90^\circ} (k \cdot \text{sen } x) = k$$

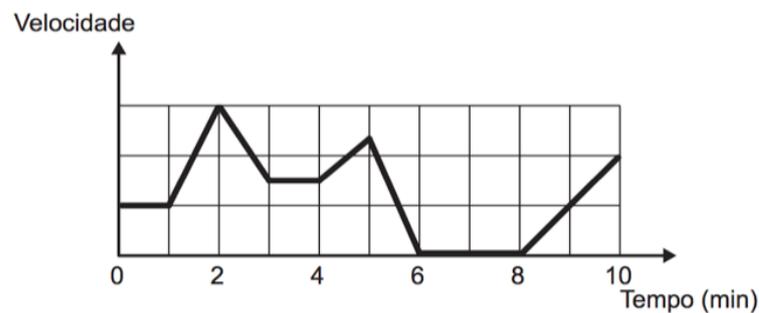
Para $X = 30^\circ$,

$$I(30^\circ) = k \cdot \text{sen}30^\circ = k \cdot \frac{1}{2} = \frac{k}{2} = 50\% \text{ de } K$$

$$\rightarrow I_{\max} = 50\%$$

ENEM (2017) QUESTÃO 139

Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

- A) 4
- B) 3
- C) 2
- D) 1
- E) 0

ANÁLISE DA QUESTÃO

Para que o veículo esteja imóvel é necessário que sua posição não mude com o passar do tempo. Observando o gráfico podemos determinar que o veículo permanece imóvel no intervalo de tempo (Δt em minutos) é entre 6 e 8 minutos; podemos então determinar que o tempo em que o veículo permanece imóvel é de **2 minutos**.

ENEM (2017) QUESTÃO 140

Um garçom precisa escolher uma bandeja retangular para servir quatro taças de espumante que precisam ser dispostas em uma única fileira, paralela ao lado maior da bandeja, e com suas bases totalmente apoiadas na bandeja. A base e a borda superior das taças são círculos de raio 4 cm e 5 cm, respectivamente.

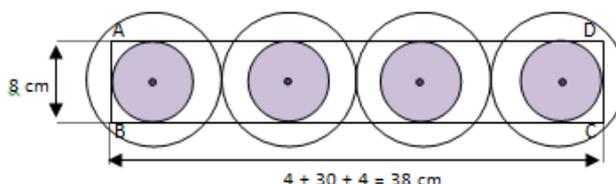


A bandeja a ser escolhida deverá ter uma área mínima, em centímetro quadrado, igual a:

- A) 192.
- B) 300.
- C) 304.
- D) 320.
- E) 400.

ANÁLISE DA QUESTÃO

Temos que a bandeja é retangular e que as taças possuem as seguintes dimensões, base 4 cm de raio (8 cm diâmetro) e borda superior 5 cm de raio (10 cm de diâmetro).



A área da bandeja deverá possuir no mínimo as seguintes dimensões: lado AD = 8 cm (base da taça) e lado BC = 38 cm (4 + 5 + 10 + 10 + 5 + 4).

Logo, teremos a área da bandeja será de $8 \times 38 = 304 \text{ cm}^2$

ENEM (2017) QUESTÃO 142

Um casal realiza sua mudança de domicílio e necessita colocar numa caixa de papelão um objeto cúbico de 80 cm de aresta, que não pode ser desmontado. Eles têm à disposição cinco caixas, com diferentes dimensões, conforme descrito:

- Caixa 1: 86 cm x 86 cm x 86 cm
- Caixa 2: 75 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 3: 85 cm x 82 cm x 90 cm
- Caixa 4: 82 cm x 95 cm x 82 cm
- Caixa 5: 80 cm x 95 cm x 85 cm

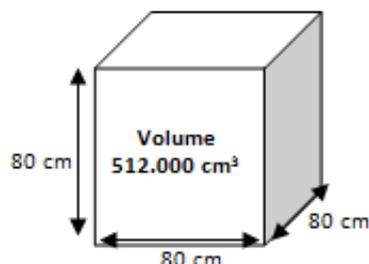
O casal precisa escolher uma caixa na qual o objeto caiba, de modo que sobre o menor espaço livre em seu interior.

A caixa escolhida pelo casal deve ser a de número.

- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5

ANÁLISE DA QUESTÃO

O objeto tem forma cúbica com aresta de 80 cm, ou seja, seu volume é de $80 \times 80 \times 80 = 512.000 \text{ cm}^3$. Qualquer caixa que tenha uma aresta menor do que 80 cm não atende a necessidade do casal, ou seja, a caixa 2 está descartada.



Ficamos com cx 1, cx 3, cx 4 e cx 5. Vejamos os respectivos volumes:

$$\text{Cx 1: } 86 \times 86 \times 86 = 636.056 \text{ cm}^3$$

$$\text{Cx 3: } 85 \times 82 \times 90 = 627.300 \text{ cm}^3$$

$$\text{Cx 4: } 82 \times 95 \times 82 = 638.780 \text{ cm}^3$$

$$\text{Cx 5: } 80 \times 95 \times 85 = 646.000 \text{ cm}^3$$

Logo, temos que a caixa em que sobrar o menor espaço possível é **a caixa de número 3**.

ENEM (2017) QUESTÃO 144

Uma empresa especializada em conservação de piscinas utiliza um produto para tratamento da água cujas especificações técnicas sugerem que sejam adicionados 1,5 mL desse produto para cada 1.000 L de água da piscina. Essa empresa foi contratada para cuidar de uma piscina de base retangular, de profundidade constante igual a 1,7 m, com largura e comprimento iguais a 3 m e 5 m, respectivamente. O nível da lâmina d'água dessa piscina é mantido a 50 cm da borda da piscina.

A quantidade desse produto, em mililitros, que deve ser adicionada a essa piscina de modo a atender às suas especificações técnicas é:

- A) 11,25.
- B) 27,00.
- C) 28,80.
- D) 32,25.
- E) 49,50.

ANÁLISE DA QUESTÃO



I) devemos determinar o volume de água contida na piscina. Como o espelho d'água fica a 50 cm da borda, teremos então que a profundidade será de 1,20 m.

$$1,20 \times 5 \times 3 = 18 \text{ m}^3 \text{ de água} = 18.000 \text{ L}$$

II) deverá ser utilizado 1,5 mL para cada $1000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

III) Fazendo uma regra de três (razão e proporção), teremos:

$$X \text{ mL} \cdot \text{m}^3 = 1,5 \text{ mL} \cdot 18 \text{ m}^3$$

$$\frac{1,5 \text{ mL}}{X \text{ mL}} \times \frac{1 \text{ m}^3}{18 \text{ m}^3} \Rightarrow X = \frac{27 \text{ mL} \cdot \cancel{\text{m}^3}}{\cancel{\text{m}^3}} \quad \mathbf{X = 27 \text{ mL}}$$

ENEM (2017) QUESTÃO 146

Em um teleférico turístico, bondinhos saem de estações ao nível do mar e do topo de uma montanha. A travessia dura 1,5 minutos e ambos os bondinhos se deslocam à mesma velocidade. Quarenta segundos após o bondinho **A** partir da estação ao nível do mar, ele cruza com o bondinho **B**, que havia saído do topo da montanha.

Quantos segundos após a partida do bondinho **B** partiu o bondinho **A**?

- A) 5
- B) 10
- C) 15
- D) 20
- E) 25

ANÁLISE DA QUESTÃO

Para que os bondinhos se encontrem, devemos ter que suas velocidades são iguais e que essa distância é percorrida em 1,5 minutos (90 segundos). Temos então:

$$V_A = V_B = \frac{D}{\Delta t}$$

Como o bondinho **A** cruza com o bondinho **B** 40 segundos após a partida de **B**, deve-se encontrar a distância percorrida por **A**.

$$V_B = V_A = \frac{D}{\Delta t} \Rightarrow \frac{D}{90} \cdot 40 = D = \frac{4}{9}$$

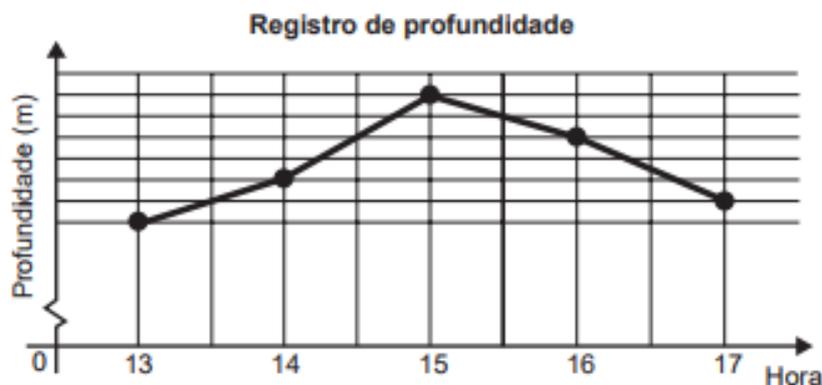
Logo, a distância percorrida pelo bondinho **B** será de:

$\frac{5 \cdot D}{9}$	e seu deslocamento será = 50 segundos
$\frac{D}{90}$	

Logo, **A** partiu 10 segundos após **B**

ENEM (2017) QUESTÃO 147

Num dia de tempestade, a alteração na profundidade de um rio, num determinado local, foi registrada durante um período de 4 horas. Os resultados estão indicados no gráfico de linhas. Nele, a profundidade **h**, registrada às 13 horas, não foi anotada e, a partir de **h**, cada unidade sobre o eixo vertical representa um metro.



Foi informado que entre 15 horas e 16 horas, a profundidade do rio diminuiu em 10%.

Às 16 horas, qual é a profundidade do rio, em metros, no local onde foram feitos os registros?

- A) 18
- B) 20
- C) 24
- D) 36
- E) 40

ANÁLISE DA QUESTÃO

É dado na questão que a profundidade do rio às 13h, tem-se que às 15h a profundidade do rio era de $h + 6m$ e às 16h a profundidade passou a ser de $h + 4m$, 10% a menos do que a profundidade às 15h.

Logo, teremos:

$$h + 4 = 90\% \cdot (h + 6)$$

$$h + 4 = 0,9h + 5,4 \Leftrightarrow h - 0,9h = 5,4 - 4 \Leftrightarrow 0,1h = 1,4$$

$$0,1h = 1,4 \text{ (x10\%)} \Rightarrow \underline{h = 14}$$

Assim, temos que às 16h a profundidade do rio no local indicado, em metros, era: $h + 4 \Rightarrow 14 + 4 = 18m$

ENEM (2017) QUESTÃO 148

Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na ilha de Gotland, na Suécia, conforme *Figura 1*. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na *Figura 2*. A ideia é permitir ao hospede uma estadia livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.



Figura 1

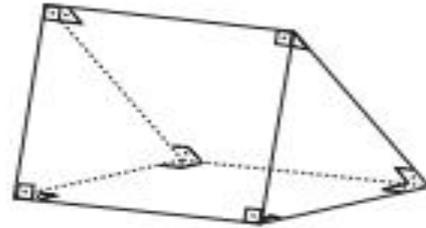


Figura 2

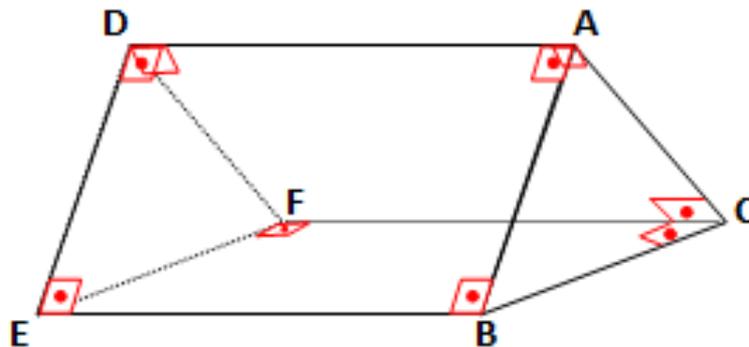
ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (adaptado).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na *Figura 2* é:

- A) tetraedro;
- B) pirâmide retangular;
- C) tronco de pirâmide retangular;
- D) prisma quadrangular reto;
- E) prisma triangular reto.

ANÁLISE DA QUESTÃO

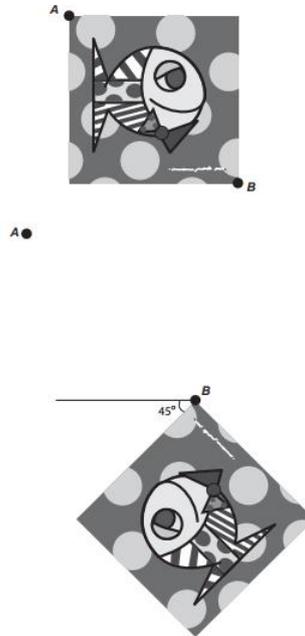
Identificando os vértices na figura 2, temos a representação de um **PRISMA TRIANGULAR RETO** de bases ABC e DEF.



ENEM (2017) QUESTÃO 150

A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada *O peixe*, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada os pontos **A** e **B**.

Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprendeu, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada conforme a figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.

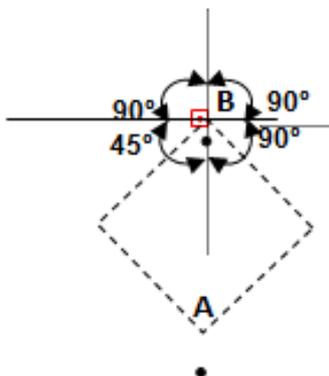


Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360° .

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

- A) 90° no sentido horário
- B) 135° no sentido horário
- C) 180° no sentido anti-horário
- D) 270° no sentido anti-horário
- E) 315° no sentido horário

ANÁLISE DA QUESTÃO



No sentido horário é necessário girar $45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$; e para o sentido anti-horário devemos girar $45^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 225^\circ$

ENEM (2017) QUESTÃO 151

A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação “Bom” ou “Excelente” conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina

I é:

- A) 7,00
- B) 7,38
- C) 7,50
- D) 8,25
- E) 9,00

ANÁLISE DA QUESTÃO

Atribuindo o valor **X** para a nota que falta, sendo os números de créditos de cada disciplina os respectivos pesos da **média ponderada**, e que a mesma deve ser superior ou igual a **7,0** para que assim o aluno seja classificado como “**Bom**” ou “**Excelente**”, temos que:

$$\frac{X12 + 8.4 + 6.8 + 5.8 + 7.5. 10}{12 + 4 + 8 + 8 + 10} \geq 7$$

$$\frac{12X + 32 + 48 + 40 + 75}{42} \geq 7$$

$$12X + 195 \geq 7. 42$$

$$12X + 195 \geq 294$$

$$12X \geq 294 - 195$$

$$12X \geq 99$$

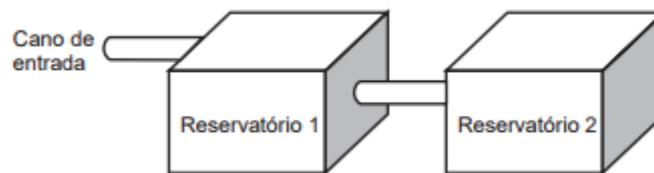
$$X \geq \frac{99}{12}$$

X ≥ 8,25

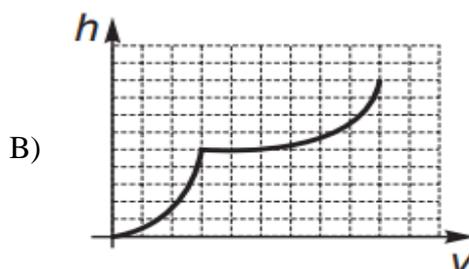
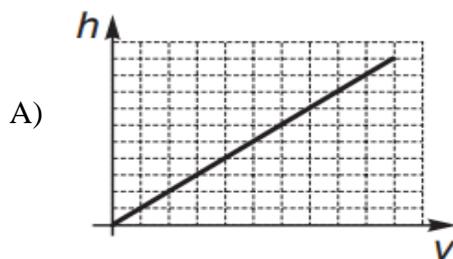
Logo, temos que a nota mínima deve ser maior ou igual a 8,25.

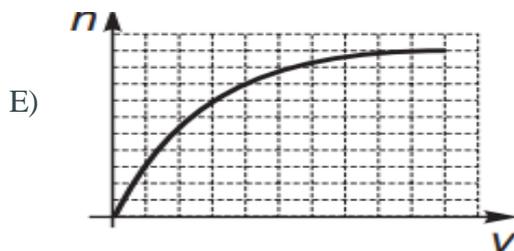
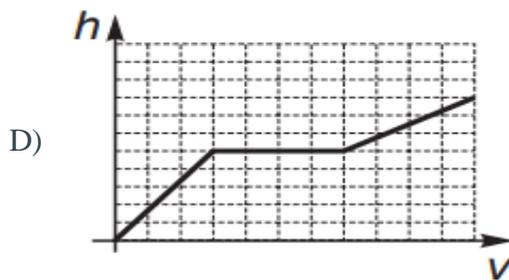
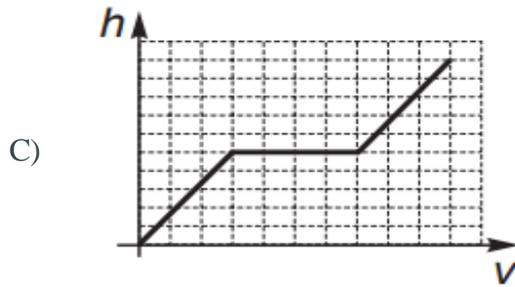
ENEM (2017) QUESTÃO 152

A água para abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.



A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios. Qual dos gráficos, melhor descreverá a altura h do nível da água no reservatório 1, em função do volume V da água no sistema?

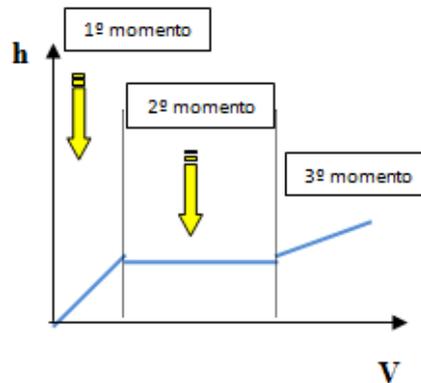




ANÁLISE DA QUESTÃO

Devemos levar em consideração que até a água atingir a altura do cano de ligação (1º momento), o nível sobe com uma velocidade constante. Porém, ao atingir a altura do cano de ligação, passa a encher agora o Reservatório 2, onde o nível do Reservatório 1 permanecerá inalterado até que os dois níveis se igualem (2º momento).

Quando os níveis nos 2 reservatórios forem iguais, (3º momento) esses passam a subir com uma velocidade constante, no entanto menor do que a velocidade inicial no Reservatório 1, resultando assim, um trecho inicial mais inclinado, depois passa a ter um outro trecho menos inclinado (velocidade da água menor).



ENEM (2017) QUESTÃO 178

Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- A) 64
- B) 56
- C) 49
- D) 36
- E) 28

ANÁLISE DA QUESTÃO

Usando a fórmula $C_{N;P} = \frac{N!}{P!(N-P)!}$ teremos:

$$\rightarrow C_{8;2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2!6!} \Rightarrow \frac{56}{2} = \boxed{28}$$

ENEM (2017) QUESTÃO 179

Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva na região.

Qual a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- A) 0,075
- B) 0,150
- C) 0,325
- D) 0,600
- E) 0,800

ANÁLISE DA QUESTÃO

Como as probabilidades de atraso do morador são de 50% em caso de chuva e de 25% em caso de que não chova. A previsão para a ocorrência de chuva é de 30%; assim, temos 70% para que não haja chuva. Portanto, a probabilidade desse morador se atrasar para o serviço será dada pelo produto das possibilidades caso haja chuva somado ao produto das possibilidades de que não haja chuva:

$$\boxed{30\% \times 50\% + 70\% \times 25\% = 0,325}$$